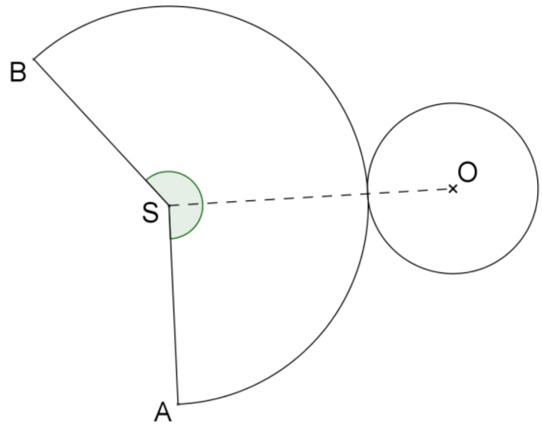
4ème

Contrôle de Mathématiques

Vous devrez justifier soigneusement toutes vos réponses

Exercice 1 :

On a représenté à main levée, le patron d'un cône de révolution.
Les génératrices mesurent 5 cm.
Le disque de base, de centre O, a pour rayon R = 3 cm.



1) Quelle est la hauteur de ce cône ?
Calculer cette hauteur.

2) Calculer le volume de ce cône.

3) Calculer la valeur exacte du périmètre du grand disque de centre S ayant une génératrice pour rayon.

4) Calculer la valeur exacte du périmètre du disque de base.

5) Quelle est la valeur exacte de la longueur l'arc de cercle AB ?

6) On admet qu'il y a proportionnalité entre la mesure de l'angle ASB et la longueur de l'arc de cercle AB.
Calculer la valeur de l'angle ASB en utilisant le tableau ci-contre :

	Longueur	Mesure de l'angle
Grand cercle		360°
Arc de cercle		ASB

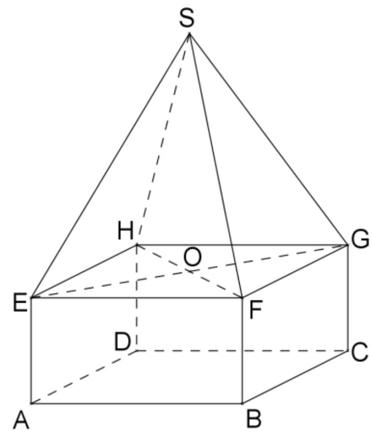
7) En utilisant la valeur obtenue pour l'angle ASB, calculer l'aire latérale de ce cône en utilisant le tableau ci-contre :

	Aire	Mesure de l'angle
Grand cercle		360°
Portion de cercle		ASB

Exercice 2 :

L'objectif de cet exercice est de déterminer le plus grand des deux volumes proposés.

1) ABCDEFGH est un pavé droit à base carrée ABCD.
On donne : AB = 5 cm et AE = 2 cm.
Ce pavé est surmonté d'une pyramide SEFGH.
L'arête latérale mesure 6 cm.



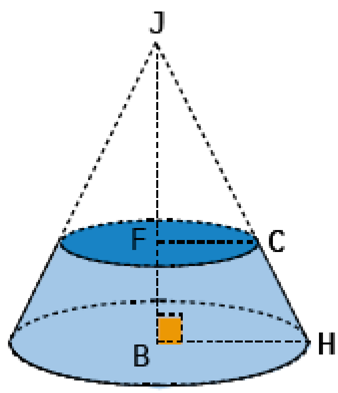
a) Calculer le volume du pavé droit ABCDEFGH.
b) Calculer la longueur FH puis calculer la hauteur $[SO]$ de la pyramide.
c) Calculer le volume de cette pyramide.
d) Calculer le volume total du solide ABCDEFGHS.

2) Un tronc de cône est déterminé par un cône (C) duquel on retire un autre cône (C').

Le tronc de cône représenté ci-contre est défini par un cône (C_1) de sommet J et de base le disque de rayon $[BH]$ et par un cône (C_2) de sommet J et de base le disque de rayon $[FC]$.

On donne : BJ = 18 cm , FJ = 14,4 cm , BH = 12,5 cm.

Les droites (FC) et (BH) sont parallèles.

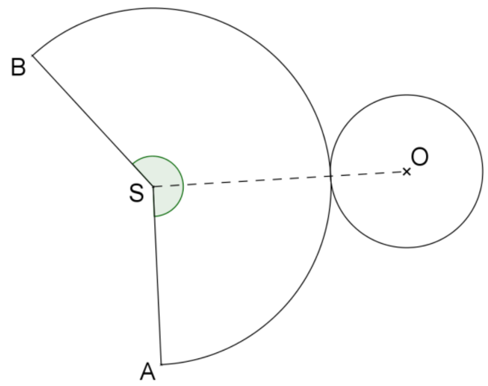


a) En utilisant le théorème de Thalès avec soin, calculer la longueur FC.
b) Calculer les volumes de deux cônes, puis le volume du tronc de cône.

CORRIGE – M. QUET

Exercice 1 :

SA = SB = 5 cm. Le disque de base a pour rayon R = OA = 3 cm.



1) La hauteur de ce cône est $[OS]$.

Le triangle SOA est rectangle en O. D'après le th de Pythagore :

$$SA^2 = SO^2 + OA^2$$
$$5^2 = SO^2 + 3^2$$
$$SO^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$
$$SO = \sqrt{16} = 4\text{cm.}$$

2) Volume de ce cône : $V = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3} = \dfrac{\pi \times OA^2 \times SO}{3} = \dfrac{\pi \times 3^2 \times 4}{3} = 12\pi \simeq 37,7\,\text{cm}^3$

3) Périmètre du grand disque de centre S : $P = \text{diamètre} \times \pi = 2 \times SA \times \pi = 2 \times 5 \times \pi = 10\pi$ cm.

4) Périmètre du disque de base : $p = \text{diamètre} \times \pi = 2 \times OA \times \pi = 2 \times 3 \times \pi = 6\pi$

5) **La longueur l'arc de cercle** AB **est égale au périmètre de la base** : $AB = p = 6\pi$ cm.

6) La mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ est proportionnelle à la longueur de l'arc de cercle AB.

On utilise le tableau ci-contre : Produit en croix :

	Longueur AB	Angle $\widehat{ASB}$
Grand cercle	10π	360°
Arc de cercle AB	6π	$\widehat{ASB}$

$$\widehat{ASB} \times 10\pi = 360 \times 6\pi$$

$$\widehat{ASB} = \frac{360 \times 6\boxed{\pi}}{10\boxed{\pi}} = \frac{36 \times \boxed{10} \times 6}{\boxed{10}} = 36 \times 6 = 216°$$

7) L'angle $\widehat{ASB}$ mesure 216°.

L'aire du grand disque de centre S est :

$A = \pi \times \text{rayon}^2 = \pi \times SA^2 = \pi \times 5^2 = 25\pi\,\text{cm}^2$.

L'aire de la portion latérale est proportionnelle à l'angle de développement : On utilise ce tableau :

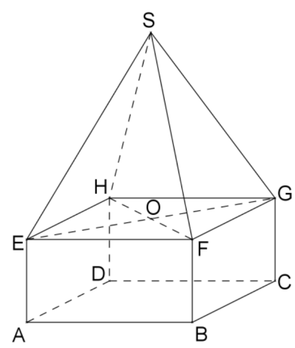
	Aire	Angle $\widehat{ASB}$
Grand cercle	25π	360°
Portion de cercle	x	216

On appelle x l'aire de la portion de disque cherchée.

Produit en croix : $360 \times x = 216 \times 25\pi$

$$x = \frac{216 \times 25\pi}{360} = 15\pi \approx 47,1\,\text{cm}^2$$

Exercice 2 :



1) ABCDEFGH est un pavé droit à base carrée ABCD, AB = 5 cm , AE = 2 cm.
Ce pavé est surmonté d'une pyramide SEFGH, d'arête latérale mesurant 6 cm.

a) Volume du pavé droit ABCDEFGH : $V = \text{longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$

$$V = AB \times AD \times AE = 5 \times 5 \times 2 = 50\,\text{cm}^3$$

b) La face EFGH est un carré donc le triangle EFH est rectangle en E.

D'après le théorème de Pythagore : $FH^2 = FE^2 + EH^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$

Donc : $FH = \sqrt{50} \approx 7,07\,\text{cm}$

Les diagonales du carré se coupent en leur milieu donc :

$$FO = \frac{FH}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} \approx 3,54 \text{ cm.}$$

Le triangle SOF est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore :

$$SF^2 = SO^2 + OF^2$$
$$SO^2 = SF^2 - OF^2 = 6^2 - 3,54^2 = 23,47$$
$$SO = \sqrt{23,47} \approx 4,84 \text{ cm.}$$

c) Volume de cette pyramide : $V = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3} = \dfrac{EF \times FG \times SO}{3} = \dfrac{5 \times 5 \times 4,84}{3} \approx 40,33\,\text{cm}^3$.

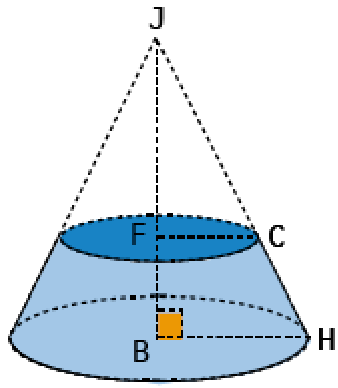
d) Volume total du solide ABCDEFGHS : $50 + 40,33 = 90,33\,\text{cm}^3$

2) Un tronc de cône est déterminé par un cône (C) duquel on retire un autre cône (C').

Le tronc de cône représenté ci-contre est défini par un cône (C_1) de sommet J et de base le disque de rayon $[BH]$ et par un cône (C_2) de sommet J et de base le disque de rayon $[FC]$.

On donne : BJ = 18 cm , FJ = 14,4 cm , BH = 12,5 cm.

Les droites (FC) et (BH) sont parallèles.



a) Dans le triangle JBH :

On sait que : $F \in [JB]$, $C \in [JH]$ et $[FC] // [BH]$

D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{JF}{JB} = \dfrac{JC}{JH} = \dfrac{FC}{BH}$, soit : $\dfrac{14,4}{18} = \dfrac{JC}{JH} = \dfrac{FC}{12,5}$

Ainsi : $\dfrac{14,4}{18} = \dfrac{FC}{12,5}$ → produit en croix : $18 \times FC = 14,4 \times 12,5$ d'où : $FC = \dfrac{14,4 \times 12,5}{18} = 10$ cm.

b) Volume du grand cône : $V = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3} = \dfrac{\pi \times BH^2 \times JB}{3} = \dfrac{\pi \times 12,5^2 \times 18}{3} = 937,5\pi \approx 2945,2 \text{ cm}^3$

Volume du grand cône : $v = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3} = \dfrac{\pi \times FC^2 \times JF}{3} = \dfrac{\pi \times 10^2 \times 14,4}{3} = 480\pi \approx 1508 \text{ cm}^3$

Volume du tronc de cône : $V - v = 937,5\pi - 480\pi = 457,5\pi \approx 1437,3 \text{ cm}^3$